Математика
Тест 3
Кључ за оцењивање

ОПШТЕ УПУТСТВО ЗА ОЦЕЊИВАЊЕ

Кључ за оцењивање дефинише начин на који се оцењује сваки појединi задатак. У општим упутствима за оцењивање дефинисане су оне ситуације које могу да се јаве у одговорима на различита питања, а која је важно да сви оцењивачи реше на јединствен начин.

1. Задатак са исправним поступком и тачним Резултатом (одговором) добија максимални број поена без обзира да ли је рађен на други начин од оног који предвиђа кључ.
2. Бодови се не одбијају ако тачан Резултат (решење, одговор) није уписан у кућицу предвиђену за Резултате.
3. Задатак у коме се појављује мерна јединица добија максималан број поена чак иако та јединица није написана.
4. Максималан број поена добија се за тачно урађен задатак у чијем решењу постоји слика (или цртеж) иако та слика (цртеж) није урађена, осим ако се то изричито тражи.
5. Бодови се не одбијају ако је цртеж у задатку тачно урађен графитном оловком.
6. Прегледач уписује бодове у предвиђену кућицу поред задатка. За погрешно урађен задатак у кућицу уписати нулу, а за неурађен задатак уписати црту.
7. Уколико је ученик написао тачан Резултат (решење) а није урадио поступак у задацима у којима је поступак потребан, добија нула поена.
8. Уколико је ученик уочио грешку и прецртао део поступка и након тога урадио тачно задатак, добија максималан број поена предвиђених за тај задатак.
9. Број π се мора уписивати и током израде задатка и у одговору ако је то у тексту назначено.

1 бод

1. Из скупа $\left\{\sqrt{3};\ -\frac{1}{6};\ 0;\ 1{,}73;\ -\sqrt{2};\ 0{,}333...;\ \sqrt{16};\ \pi\right\}$ издвојити рационалне и ирационалне бројеве.

   А) Рационални бројеви су: ______________________________ .

   Б) Ирационални бројеви су: ______________________________ .

Место за рад:

А) Рационални бројеви су: $-\frac{1}{6};\ 0;\ 1{,}73;\quad 0{,}333...;\ \sqrt{16}$.

Б) Ирационални бројеви су: $\sqrt{3}; -\sqrt{2}; \pi$.

Поступак није потребан. Тачан одговор под А доноси 0,5 бодова, тачан одговор под Б доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

1 бод

2. Израчунати $\frac{3^2\cdot 5^3}{15^2}-\frac{2^2\cdot 3^2}{6}$.

Место за рад:

$$\frac{3^2\cdot 5^3}{15^2}-\frac{2^2\cdot 3^2}{6} = \frac{3^2\cdot 5^2\cdot 5}{15^2}-\frac{\left(2\cdot 3\right)^2}{6} = \frac{15^2\cdot 5}{15^2}-\frac{6^2}{6} = 5-6 = -1.$$

Поступак обавезан. **Укупно 1 бод.**

1 бод

3. Раставити на чиниоце следеће изразе:

А) $9x^2 - 1$;

Б) $(x-1)^2 - 4$.

Место за рад:

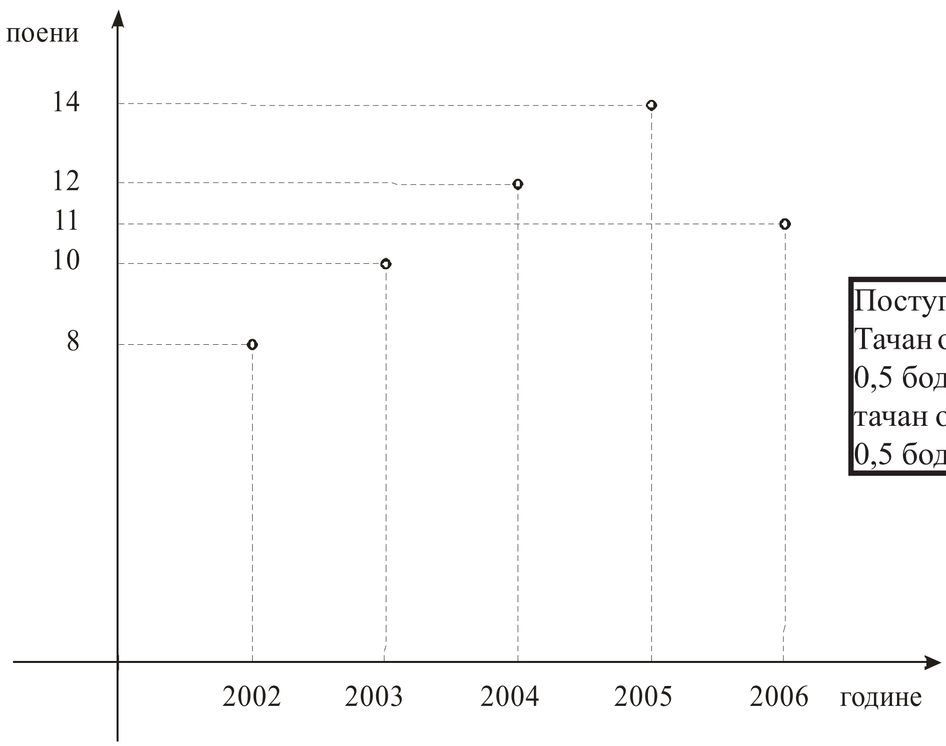
А) $9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x-1)(3x+1)$;

Б) $(x-1)^2 - 4 = (x-1)^2 - 2^2 = (x-1-2)\cdot(x-1+2) = (x-3)\cdot(x+1)$.

Поступак није потребан. Тачан одговор под А доноси 0,5 бодова, тачан одговор под Б доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

1 бод

4. На графику је приказано како се мењао просечан број поена који су ученици постигли на пријемном испиту из математике од 2002. до 2006. године.



Поступак није потребан. Тачан одговор под А доноси 0,5 бодова, тачан одговор под Б доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

А) Које године су ученици постигли најбоље резултате?

Б) Колики је просечан број поена из математике био 2004. године?

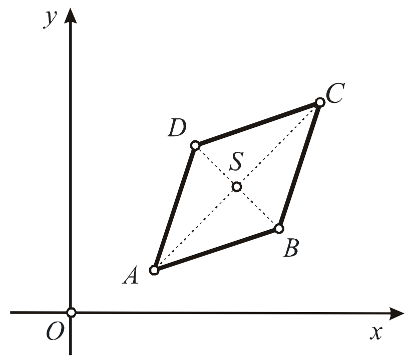
А) 2005; Б) 12.

1 бод

5. У координатном систему xOy су дате тачке $A(2,1)$, $B(5,2)$ и $D(3,4)$. Одредити:

1) координате средишта S дужи BD,

2) координате тачке C за коју је четвороугао $ABCD$ паралелограм.



Место за рад:

Нека је $S = S(x_0, y_0)$ и $C = C(x, y)$.

1) Како је тачка S средиште дужи BD и $B = B(5,2)$, $D = D(3,4)$, биће:

$$x_0 = \frac{5+3}{2} \quad \text{и} \quad y_0 = \frac{2+4}{2},$$

то јест $x_0 = 4$ и $y_0 = 3$. Тражена тачка S је $S(4,3)$.

2) Како је четвороугао $ABCD$ паралелограм, тачка $S(4,3)$ је средиште дужи са крајевима $A = A(2,1)$ и $C = C(x, y)$. Зато је:

$$4 = \frac{2+x}{2} \quad / \cdot 2$$

$$3 = \frac{1+y}{2} \quad / \cdot 2$$

$$8 = 2 + x$$

$$6 = 1 + y,$$

то јест $x = 6$ и $y = 5$. Тражена тачка C је $C(6,5)$.

Поступак обавезан. Тачан одговор под 1 доноси 0,5 бодова, тачан одговор под 2 доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

1 бод

6. Цена ципела је 2.700 динара. Колика ће бити цена након снижења од 15%?

Место за рад:

Након снижења цена ципела ће бити $100\% - 15\% = 85\%$ првобитне цене, то јест

$$85\% \cdot 2700 = \frac{85}{100} \cdot 2700 = 2295 \text{ динара.}$$

Поступак обавезан.
Тачно постављена "формула" доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

7. Решити једначину $\frac{2x+3}{3}-\frac{5x-14}{2}-\frac{x}{4}=\frac{x+1}{2}$.

1 бод

Место за рад:

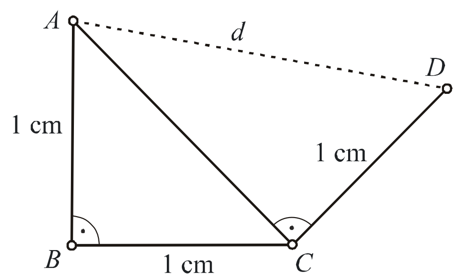
$$\frac{2x+3}{3}-\frac{5x-14}{2}-\frac{x}{4} = \frac{x+1}{2} \Big/ \cdot 12$$
$$4(2x+3)-6(5x-14)-3x = 6(x+1),$$
$$8x+12-30x+84-3x = 6x+6,$$
$$8x-30x-3x-6x = -12-84+6,$$
$$-31x = -90,$$
$$x = \frac{90}{31} = 2\frac{28}{31}.$$

Решење једначине је $x=\frac{90}{31}$, то јест $x = 2\frac{28}{31}$.

Поступак обавезан. **Укупно 1 бод.**

8. Ако су подаци као на приложеном цртежу, одредити растојање d између тачака A и D.

1 бод



Место за рад:

Како су троуглови ACD и ABC правоугли, на основу Питагорине теореме важи:

$$AD^2 = AC^2+CD^2 \quad \text{и} \quad AC^2 = AB^2+BC^2,$$

то јест

$$d^2 = AC^2+1^2 \quad \text{и} \quad AC^2 = 1^2+1^2.$$

Одатле следи да је $d^2 = 1^2+1^2+1^2 = 3$, па је тражено растојање $d = \sqrt{3}$ cm.

Поступак обавезан. Тачно израчунато растојање измађу тачака A и C доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

1 бод

9. Површина неког круга је $12{,}56\text{cm}^2$. Ако је $\pi \approx 3{,}14$, одредити његов обим и дужину највеће тетиве.

Место за рад:

Ако је r полупречник тог круга, биће:

$$P = r^2\pi$$
$$12{,}56 = r^2 \cdot 3{,}14$$
$$r^2 = 12{,}56 : 3{,}14$$
$$r^2 = 4$$

то јест $r = 2\text{ cm}$. Зато је обим тог круга:

$$O = 2r\pi$$
$$O = 4 \cdot 3{,}14$$
$$O = 12{,}56\text{ cm}.$$

Највећа тетива тог круга је његов пречник, па је њена дужина $d = 2r = 4\text{ cm}$.

Поступак обавезан. Тачно израчунат полупречник круга доноси 0,5 бодова, тачно израчунат обим круга и тетива доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

1 бод

10. Израчунати површину и запремину правилне шестостране призме чија је основна ивица 5 cm, а висина 6 cm.

Место за рад:

Тражена површина правилне шестостране призме чија је основна ивица a, а висина H јесте:

$$P = 2B + M,$$
$$P = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot a \cdot H,$$
$$P = 3 \cdot 25\sqrt{3} + 6 \cdot 5 \cdot 6,$$
$$P = 15\left(5\sqrt{3} + 12\right)\text{ cm}^2.$$

Тражена запремина је:

$$V = B \cdot H,$$
$$V = 6 \cdot \frac{5^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 6,$$
$$V = 225\sqrt{3}\text{ cm}^3.$$

Поступак обавезан. Тачно израчуната површина доноси 0,5 бодова, тачно израчуната запремина доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

11. Разлика два оштра угла правоуглог троугла износи 45°. Израчунати величину тих углова.

1 бод

Место за рад:

Ако са α и β означимо оштре углове правоуглог троугла, тада је:

$$\alpha - \beta = 45^\circ$$
$$\underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

$$2\alpha = 135^\circ$$
$$\underline{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

$$\alpha = 67^\circ 30'$$
$$\underline{67^\circ 30' + \beta = 90^\circ}$$

$$\alpha = 67^\circ 30'$$
$$\underline{\beta = 90^\circ - 67^\circ 30'}$$

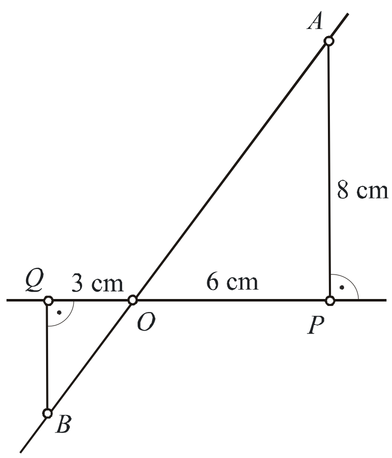
$$\alpha = 67^\circ 30'$$
$$\beta = 22^\circ 30'$$

Тражени углови су $67^\circ 30'$ и $22^\circ 30'$.

Поступак је обавезан.
Тачно израчунат један угао доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

12. Ако су ознаке и подаци као на приложеном цртежу, одредити дужине дужи BQ и OB.

1 бод



Место за рад:

Како су праве AP и BQ ортогоналне на истој правој PQ, оне су паралелне, па на основу Талесове теореме важи:

$$BQ : AP = OQ : OP,$$
$$BQ : 8 = 3 : 6,$$
$$6 \cdot BQ = 8 \cdot 3,$$

то јест $BQ = 4\text{ cm}$.

Поступак обавезан.
Тачно израчуната дуж BQ доноси 0,5 бодова,
тачно израчуната дуж OB доноси 0,5 бодова. **Укупно 1 бод.**

Троугао OBQ је правоугли, па сада, на основу Питагорине теореме важи:

$$OB^2 = BQ^2 + OQ^2,$$
$$OB^2 = 4^2 + 3^2,$$
$$OB^2 = 25.$$

Тражене дужине дужи BQ и OB су $BQ = 4\text{ cm}$ и $OB = 5\text{ cm}$.

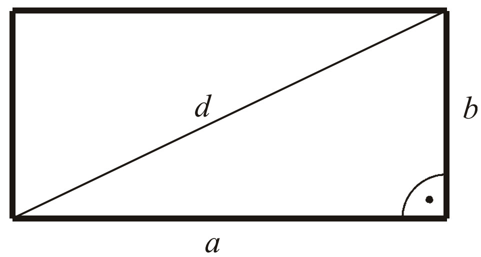
1,5 бод

13. Дијагонала правоугаоника је d = 13 cm, а једна његова страница a = 5 cm. Одредити обим и површину тог правоугаоника.

Место за рад:

Ако је b друга страница тог правоугаоника, биће

$$a^2 + b^2 = d^2,$$
$$5^2 + b^2 = 13^2,$$
$$b^2 = 169 - 25,$$
$$b^2 = 144,$$



па је $b = 12\ \text{cm}$. Тражени обим правоугаоника је

$$O = 2a + 2b = 34\ \text{cm},$$

док је његова површина $P = ab = 60\ \text{cm}^2$.

Поступак обавезан. Тачно израчуната друга страница правоугаоника доноси 0,5 бодова, тачно израчунат обим доноси 0,5 бодова, тачно израчуната површина правоугаоника доноси 0,5 бодова. **Укупно 1,5 бодова.**

1,5 бод

14. Наћи највећи цео број a који задовољава неједначину $\frac{2a+1}{3} - \frac{3a-2}{2} > -1$.

Место за рад:

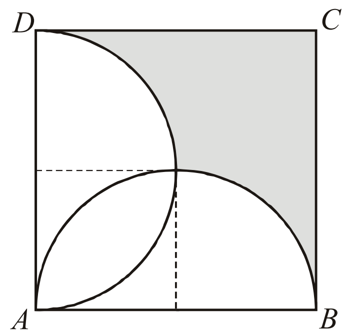
$$\frac{2a+1}{3} - \frac{3a-2}{2} > -1 \ \Big/ \cdot 6$$
$$2(2a+1) - 3(3a-2) > -6,$$
$$4a + 2 - 9a + 6 > -6,$$
$$4a - 9a > -2 - 6 - 6,$$
$$-5a > -14 \ \Big/ : (-5),$$
$$a < \frac{14}{5},$$
$$a < 2\frac{4}{5}.$$

Највећи цео број који је решење дате неједначине је $a = 2$.

Поступак је обавезан.
Тачно решена неједначина доноси 1 бод,
тачно одређен цео број доноси 0,5 бодова. **Укупно 1,5 бодова.**

15. Дијагонала квадрата $ABCD$ је 12 cm, а његове суседне странице AB и AD су пречници два круга. Одредити површину дела квадрата који је изван тих кругова.

1,5 бод



Место за рад:

Означимо са a страницу квадрата. Како је $a\sqrt{2} = 12$, добија се:

$$a = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}\ \text{cm}.$$

Тражена површина се добија када се од површине квадрата $ABCD$ одузму површине квадрата странице $\frac{a}{2}$ и полукруга полупречника $\frac{a}{2}$:

$$P = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\pi = 72 - 18 - 9\pi = 9\left(6-\pi\right)\text{cm}^2.$$

Поступак обавезан.
Тачно израчуната страница квадрата доноси 0,5 бодова. **Укупно 1,5 бодова.**

16. Израчунати запремину правилне четворостране пирамиде ако је основна ивица 10 cm, а бочна ивица заклапа са равни основе угао од 60º.

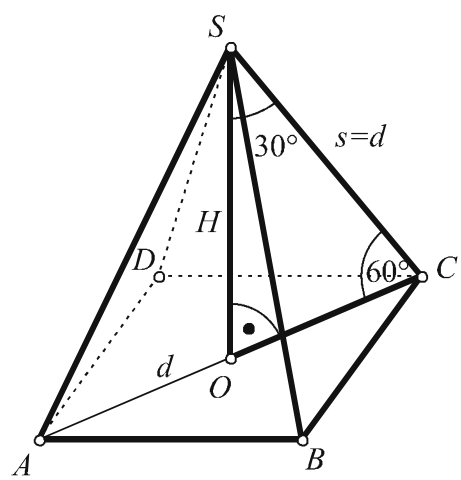
1,5 бод

Место за рад:

Троугао ACS је једнакостранични (видети цртеж). Страница тог троугла једнака је дијагонали основе пирамиде, то јест $AC = d = 10\sqrt{2}$.

Висина пирамиде H је висина једнакостраничног троугла ACS, па добијамо:

$$H = \frac{AC\cdot\sqrt{3}}{2},$$
$$H = \frac{10\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2},$$
$$H = 5\sqrt{6}\ \text{cm}.$$



Тражена запремина је:

$$V = \frac{B\cdot H}{3},$$
$$V = \frac{10^2\cdot 5\cdot\sqrt{6}}{3},$$
$$V = \frac{500\sqrt{6}}{3}\ \text{cm}^3.$$

Поступак обавезан. Тачно израчуната дијагонала основе пирамиде доноси 0,5 бодова, тачно израчуната висина пирамиде доноси 0,5 бодова и тачно израчуната запремина доноси 0,5 бодова. **Укупно 1,5 бодова.**

2 бода

17. Површина кружног прстена два концентрична круга је $P = 144\pi$ cm^2. Одредити дужину тетиве већег од тих кругова која додирује мањи круг.

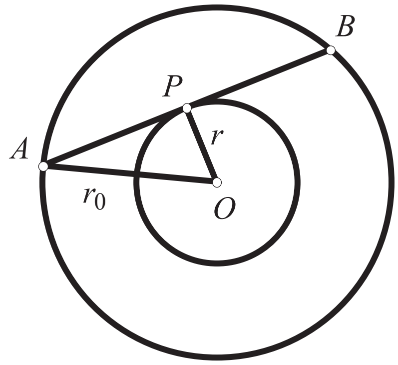
Место за рад:

Нека су r и r_0 полупречници датих кругова и $r_0 > r$. Тада за површину њиховог кружног прстена важи:

$$P = r_0^2\pi - r^2\pi,$$

$$144\pi = \left(r_0^2 - r^2\right)\pi \;/ : \pi$$

$$r_0^2 - r^2 = 144.$$



С друге стране, додирна тачка P дужи AB и мањег од тих кругова је средиште те дужи и троугао OAP је правоугли, па на основу Питагорине теореме важи:

$$AP^2 + OP^2 = OA^2,$$

$$AP^2 + r^2 = r_0^2,$$

$$AP^2 = r_0^2 - r^2,$$

$$AP^2 = 144.$$

Тиме је $AP = 12\,\mathrm{cm}$, па је тражена дужина тетиве $t = AB = 2 \cdot AP$, то јест $t = 24\,\mathrm{cm}$.

Поступак обавезан. Тачно израчуната разлика квадрата полупречника доноси 0,5 бодова, тачно израчуната дуж AP доноси 1 бод, тачно израчуната тетива доноси 0,5 бодова. **Укупно 2 бода.**